۵.۳ روش عملگر مشتق در معادلات با ضرایب ثابت

می دانید که مشتقات مراتب مختلف تابع y را می توان طبق نماد لایب نیتز با D نمایش داد و بدین ترتیب y' و y'' و y''' و . . . را می توان با نماد های Dy و D^2y و D^3y و از این قبیل نشان داد. این روش که با نام **روش اپراتور معکوس** نیز شناخته می شود، عوامل مشتق را با عامل D جایگزین نموده و جواب خصوصی معادله دیفرانسیل را با راه حلی ساده‌تر از برخی روشهای قبلی بدست می آوریم. فرض کنید فرم کلی معادلهٔ مرتبهٔ n با ضرایب ثابت بصورت

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = r(x) \qquad (12)$$

باشد که $r(x)$ تابعی برحسب x است و a_1 و a_2 و . . . و a_n اعداد حقیقی ثابتی اند. اگر طرف چپ این معادله را بر حسب عملگر D جایگزین کنیم

$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + a_2 D^2 y + a_1 D y + a_0 y = r(x)$$

و با فاکتورگیری

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y = r(x)$$

با فرض چندجمله ای $F(D)$ بشکل

$$F(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0$$

معادلهٔ (۱۲) چنین خواهد شد:

$$y = \frac{1}{F(D)} r(x) \qquad (13)$$

و $F(D)$ را **چندجمله‌ای عملگر** نامیم که کاملاً شبیه چند جمله‌ای مشخصه است. برای ادامه کار باید ریشه های چندجمله‌ای عملگر $F(D) = 0$ را پیدا کنیم. اگر λ_1 و λ_2 و $\cdots$ و λ_n ریشه‌های آن باشند پس

$$F(D) = a_n (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)(D-\lambda_3)\cdots(D-\lambda_{n-1})(D-\lambda_n)$$

و

$$y = \frac{1}{a_n} \frac{1}{(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)(D-\lambda_3)\cdots(D-\lambda_{n-1})(D-\lambda_n)} r(x)$$

یا

$$y = \frac{1}{a_n} \frac{1}{D-\lambda_1} \frac{1}{D-\lambda_2} \frac{1}{D-\lambda_3} \cdots \frac{1}{D-\lambda_{n-1}} \frac{1}{D-\lambda_n} r(x) \qquad (14)$$

از انتهای (۱۴) هر عامل را محاسبه نموده و تابع u را چنین فرض کنید

$$u = \frac{1}{D - \lambda_n} r(x)$$

و سپس $(D - \lambda_n)u = r(x)$ که نتیجه می دهد

$$u' - \lambda_n u = r$$

با حل این معادلهٔ مرتبهٔ اول و یافتن جوابی برای u، از عوامل (۱۴) یکی کم شده

$$y = \frac{1}{D - \lambda_1} \frac{1}{D - \lambda_2} \frac{1}{D - \lambda_3} \cdots \frac{1}{D - \lambda_{n-1}} u(x)$$

و مجدداً با فرض تابع v برابر

$$v = \frac{1}{D - \lambda_{n-1}} u(x)$$

و سپس

$$v' - \lambda_{n-1} v = u$$

تابع v را می یابیم و بهمین شکل سایر عوامل را در معادله (۱۲) حذف می کنیم تا جواب خصوصی y_p نهایتاً بدست آید. به مثال ذیل توجه نمائید:

مثال ۱۷.۳ حل معادلهٔ $y'' + y' - 56y = 5e^{2x}$ با عملگر مشتق.

حل. طبق عملگر مشتق $(D^2 + D - 56)y = 5e^{2x}$ و بنابراین

$$y = \frac{1}{D + 8} \cdot \frac{1}{D - 7} \cdot 5e^{2x}$$

با فرض تابع u بصورت $u = \frac{1}{D - 7} 5e^{2x}$ می نویسیم $u' - 7u = 5e^{2x}$ که معادله ای مرتبه اول و دارای جواب $u = -e^{2x}$ است (در اینجا ثابت انتگرال را نخواهیم نوشت) در قدم بعدی چون $y = \frac{1}{D + 8}(-e^{2x})$ داریم $y' + 8y = -e^{2x}$ و جواب خصوصی $y = \frac{1}{10} e^{2x}$ حاصل می‌گردد.

بعنوان یک فرمولبندی صریح، (۱۴) را می توان چنین نوشت:

$$y_p = e^{\lambda_1 x} \int e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \int e^{(\lambda_3 - \lambda_2)x} \cdots \int e^{(\lambda_n - \lambda_{n-1})x} \int e^{-\lambda_n x} r(x) (dx)^n$$

در این روش، حالات خاصی نیز برای ساده کردن راه حل (۱۳) وجود دارد.

- اگر $r(x) = e^{ax}$ سپس برای $F(D) = F(a) \neq ۰$ تابع $y_p = \frac{۱}{F(a)}e^{ax}$ جواب خصوصی است. اما اگر a ریشهٔ با تکرار k از چندجمله‌ای عملگر $F(D)$ باشد آنگاه $y_p = \frac{x^k}{k!\hat{F}(a)}e^{ax}$ جواب خصوصی است که $\hat{F}(a) = \frac{F(a)}{(D-a)^k}$.
- اگر $r(x)$ تابعی از $\sin(ax+b)$ و یا $\cos(ax+b)$ باشد، می توان بجای $D^۲$ قرار داد $-a^۲$ و در حالت کلی داریم:

$$y_p = \frac{۱}{F(D)}\cos(ax+b) = \Re\frac{e^{i(ax+b)}}{F(ia)}$$
$$y_p = \frac{۱}{F(D)}\sin(ax+b) = \Im\frac{e^{i(ax+b)}}{F(ia)}$$

که $\Re$ جزء حقیقی و $\Im$ جزء موهومی یک عدد مختلطند.

- در صورتی که سمت راست معادله $e^{ax}r(x)$ باشد می توان نوشت

$$y_p = \frac{۱}{F(D)}e^{ax}r(x) = e^{ax}\frac{۱}{F(D+a)}r(x)$$

- اگر سمت راست معادله تابعی بشکل $xr(x)$ باشد می توان نوشت

$$y_p = \frac{۱}{F(D)}x.r(x) = x\frac{۱}{F(D)}r(x) - \frac{F'(D)}{F^۲(D)}r(x)$$

- اگر $r(x)$ چندجمله‌ای از درجه n باشد $y_p = S(D).r(x)$ جواب خصوصی است و $S(D)$ چندجمله‌ای خارج قسمت است که از تقسیم عدد ۱ بر $F(D)$ تا توان n حاصل می شود.

مثال ۱۸.۳ یافتن جواب خصوصی معادلهٔ $y'' + y' - ۱۲y = e^{۵x}$ با عملگر مشتق.

حل. طبق عملگر مشتق $(D^۲ + D - ۱۲)y = e^{۵x}$ و بنابراین

$$y_p = \frac{۱}{(D-۳)(D+۴)}.e^{۵x} = \frac{۱}{(۵-۳)(۵+۴)}.e^{۵x} = \frac{۱}{۱۸}e^{۵x}$$

مثال ۱۹.۳ حل معادلهٔ $y''' + ۴y'' + y' - ۶y = e^x$ با عملگر مشتق.

حل. می نویسیم $(D^۳ + ۴D^۲ + D - ۶)y = e^x$ و

$$y = \frac{۱}{(D-۱)(D+۲)(D+۳)}e^x$$

چون $a = ۱$ پس $y = \frac{۱}{(D-۱)(۱+۲)(۱+۳)}e^x$ و $y' - y = \frac{۱}{۱۲}e^x$ و $y_p = \frac{۱}{۱۲}xe^x$.

مثال ۲۰.۳ جواب خصوصی معادلهٔ $y^{(۴)} - ۶y''' + ۱۲y'' - ۸y' = e^{۲x}$ را با عملگر مشتق بیابید.

حل. با کمی محاسبه می نویسیم $D(D-۲)^۳ y = e^{۲x}$ و

$$y_p = \frac{۱}{D(D-۲)^۳} e^{۲x} = \frac{۱}{۲(D-۲)^۳} e^{۲x} = \frac{x^۳}{۲ \times ۳!} e^{۲x} = \frac{x^۳}{۱۲} e^{۲x}$$

مثال ۲۱.۳ مطلوبست جواب خصوصی معادلهٔ $y'' - ۶y = \sin ۲x$ با عملگر مشتق.

حل. طبق عملگر مشتق

$$y = \frac{۱}{D^۲ - ۶} . \sin ۲x$$

و با جایگذاری $D^۲ = -(۲)^۲ = -۴$ داریم $y = \frac{۱}{-۴-۶} . \sin ۲x$ و سپس

$$y = -\frac{۱}{۱۰} \sin ۲x$$

مثال ۲۲.۳ جواب خصوصی معادلهٔ $y'' + y' + ۵y = ۲e^{۳x} - ۳e^x + ۴e^{-۲x} - ۴$.

حل. طبق عملگر مشتق می نویسیم:

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{۱}{D^۲ + D + ۵}(۲e^{۳x} - ۳e^x + ۴e^{-۲x} - ۴) \\ &= \frac{۱}{۳^۲ + ۳ + ۵} ۲e^{۳x} - \frac{۱}{۱^۲ + ۱ + ۵} ۳e^x + \frac{۱}{۴ - ۲ + ۵} ۴e^{-۲x} - \frac{۱}{۰ + ۰ + ۵} ۴ \\ &= \frac{۲}{۱۷} e^{۳x} - \frac{۳}{۷} e^x + \frac{۴}{۷} e^{-۲x} - \frac{۴}{۵} \end{aligned}$$

مثال ۲۳.۳ حل معادلهٔ $۲y'' + ۲y' + y = ۲x^۲ + ۸x + ۱$ با عملگر مشتق.

حل. چندجمله‌ای عملگر $F(D) = ۲D^۲ + ۲D + ۱$ بوده و با تقسیم ۱ بر $F(D)$ تا توان دوم داریم $S(D) = ۱ - ۲D + ۲D^۲$ پس

$$\begin{aligned} y_p &= S(D) r(x) \\ &= (۱ - ۲D + ۲D^۲)(۲x^۲ + ۸x + ۱) \\ &= ۲x^۲ + ۸x + ۱ - ۲(۴x + ۸) + ۲(۴) \\ &= ۲x^۲ - ۷ \end{aligned}$$